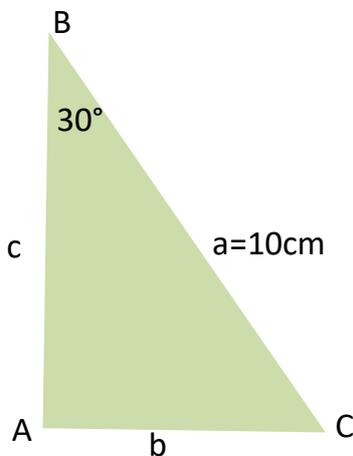


La trigonométrie

En mathématiques, la **trigonométrie** est utilisée uniquement dans le cas d'un triangle rectangle ; elle permet de relier les longueurs des côtés de ce triangle avec les valeurs des angles formés par ces trois côtés. Pour cela, trois fonctions sont utilisées :

1. La fonction sinus qui s'écrit en abrégé sin ;
2. La fonction cosinus qui s'écrit en abrégé cos ;
3. La fonction tangente qui s'écrit en abrégé tan.

Soit le triangle ABC, rectangle en $\widehat{BAC} = 90^\circ$.



Suivant les hypothèses connues du problème, il est possible de déterminer soit la valeur inconnue d'un angle ou bien la valeur inconnue d'un côté ou de l'hypoténuse. (Le côté opposé à l'angle droit est appelé hypoténuse, ici BC).

Considérons l'angle \widehat{ABC} . Comment se calculent les fonctions trigonométriques de cet angle ?

A partir du moment où l'angle est défini, nous pouvons nommer les côtés du triangle, à savoir :

- le côté AC est opposé à l'angle \widehat{ABC} auquel cas on le nomme « **côté opposé** » soit en abrégé « **Opp** »,
- le côté AB est adjacent à l'angle \widehat{ABC} , on le nomme donc « **côté adjacent** » soit en abrégé « **Adj** »,
- et sans oublier l'**hypoténuse** représenté ici par le côté BC que l'on écrit en abrégé « **Hyp** ». Les fonctions trigonométriques pour cet angle s'écrivent alors :

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{Opp}{Hyp} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{Adj}{Hyp} = \frac{AB}{BC}$$

Et

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{Opp}{Adj} = \frac{AC}{AB}$$

Question : Ecris les 3 fonctions trigonométriques pour l'angle \widehat{BCA} .

$$\sin \widehat{BCA} =$$

$$\cos \widehat{BCA} =$$

$$\tan \widehat{BCA} =$$

A quoi servent ces fonctions trigonométriques ?

Une des principales applications de ces fonctions est qu'elles permettent, en fonction des hypothèses connues d'un problème, de calculer soit la longueur d'un côté, soit un angle.

Calcul d'un côté :

Supposons que nous connaissons les valeurs de l'angle \widehat{ABC} , de la longueur de AB et de l'hypoténuse BC. Il est possible de calculer la longueur du 3^{ème} côté AC qui nous manque. Pour cela, nous pouvons utiliser soit la fonction sinus, soit la fonction tangente.

- Avec la fonction sinus, nous écrivons alors que $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$, alors, $AC = BC * \sin \widehat{ABC}$
- Avec la fonction tangente, nous écrivons alors que $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$, alors, $AC = AB * \tan \widehat{ABC}$.

Calcul d'un angle :

Supposons que nous connaissons la longueur du côté BA et celle de l'hypoténuse BC. On cherche la valeur de l'angle \widehat{BCA} .

Le côté BA de longueur connue est le côté opposé à l'angle. C'est donc la fonction sinus que nous choisissons et non les fonctions cosinus et tangente car nous ne connaissons pas la longueur du côté adjacent à l'angle.

Nous avons donc : $\sin \widehat{BCA} = \frac{Opp}{Hyp}$ et nous cherchons la valeur de l'angle \widehat{BCA} . Pour cela, nous nous servons de la calculatrice sur laquelle est programmée la fonction que l'on appelle « inverse » qui, dans l'exemple choisi, nous permet de connaître la valeur de l'angle si on connaît la valeur de son sinus. Pour cela, sur ta calculatrice, soit est écrit le symbole \sin^{-1} , soit tu trouves une touche inv (pour inverse). Dans ce cas, tu appuies sur la touche inv puis sur la touche sin.

Au final, l'angle \widehat{BCA} est égale à :

$$\widehat{BCA} = \sin^{-1}\left(\frac{Opp}{Hyp}\right)$$

Si la longueur du côté adjacent avait été connue, nous aurions pu choisir les fonctions cosinus ou tangente, en écrivant :

$$\widehat{BCA} = \cos^{-1}\left(\frac{Adj}{Hyp}\right)$$

Fiche trigonométrie

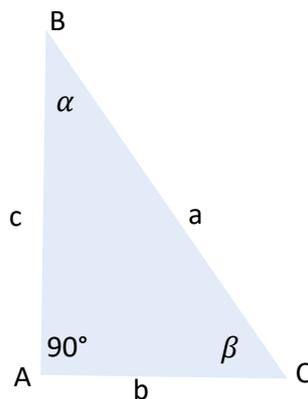
Et

$$\widehat{BCA} = \tan^{-1}\left(\frac{Opp}{Adj}\right)$$

Remarque : Assure-toi préalablement que ta calculette est programmée pour que les angles soient dans l'unité degré. Il existe une autre unité notée radian ou rd en abrégé. La conversion entre l'unité degré et l'unité radian est la suivante :

90° correspond à 1,57 rd ou encore 180° correspond à 3,14 rd

Au bilan



\widehat{ABC}	\widehat{ACB}	a	b	c
Connu = α	$\beta = 180^\circ - 90^\circ - \alpha$	Connu	$b = a * \sin \alpha$	$c = a * \cos \alpha$
Connu = α	$\beta = 180^\circ - 90^\circ - \alpha$	$a = \frac{b}{\sin \alpha}$	Connu	$c = \frac{b}{\tan \alpha}$
Connu = α	$\beta = 180^\circ - 90^\circ - \alpha$	$a = \frac{c}{\cos \alpha}$	$b = c * \tan \alpha$	Connu
$\alpha = 180^\circ - 90^\circ - \beta$	Connu = β	Connu	$b = a * \cos \beta$	$c = a * \sin \beta$
$\alpha = 180^\circ - 90^\circ - \beta$	Connu = β	$a = \frac{b}{\cos \beta}$	Connu	$c = b * \tan \beta$
$\alpha = 180^\circ - 90^\circ - \beta$	Connu = β	$a = \frac{c}{\sin \beta}$	$b = \frac{c}{\tan \beta}$	Connu
$\alpha = \sin^{-1} \frac{b}{a}$	$\beta = \cos^{-1} \frac{b}{a}$	Connu	Connu	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$
$\alpha = \tan^{-1} \frac{b}{c}$	$\beta = \tan^{-1} \frac{c}{b}$	$a = \sqrt{b^2 + c^2}$	Connu	Connu
$\alpha = \cos^{-1} \frac{c}{a}$	$\beta = \sin^{-1} \frac{c}{a}$	Connu	$b = \sqrt{a^2 - c^2}$	Connu

Fiche trigonométrie

Applications numériques : Soit, le triangle ABC tel que l'angle $\widehat{ABC} = 30^\circ$; l'hypoténuse BA=10 cm.

1. Calcul d'un côté

Calcule la longueur des côtés AC et AB. Calcule également les valeurs de $\cos \widehat{BCA}$, $\sin \widehat{BCA}$, $\tan \widehat{BCA}$ et $\cos \widehat{ABC}$.

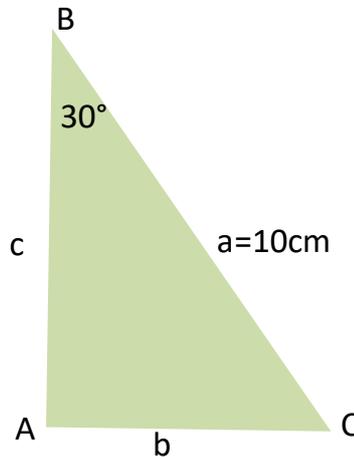


Figure 1

○ *Calcul du côté BC :*

- Avec la fonction sinus : $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$ soit $\sin 30^\circ = \frac{AC}{10}$, et $AC = 10 * \cos 30^\circ$. Sur ta calculette, tu trouves que $\cos 30^\circ = 0,5$. Auquel cas, $AC = 10 * 0,5 = 5 \text{ cm}$.

○ *Calcul du côté AB :*

- Avec la fonction cosinus : $\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC}$ soit $\cos 30^\circ = \frac{AB}{10}$, et $AB = 10 * \sin 30^\circ$. Sur ta calculette, tu trouves que $\cos 30^\circ = 0,866$. Auquel cas, $AB = 10 * 0,866 = 8,66 \text{ cm}$.
- Avec la fonction tangente : $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$ soit $\tan 30^\circ = \frac{AC}{8,66}$ et $AC = AB * \tan \widehat{ABC}$. Sur ta calculette, tu trouves que $\tan 30^\circ = 0,577$. Auquel cas, $AC = 8,66 * 0,577 = 4,99 \sim 5 \text{ cm}$.

○ $\cos \widehat{BCA} = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{10} = 0,5$; $\sin \widehat{BCA} = \frac{AB}{BC} = \frac{8,66}{10} = 0,866$; $\tan \widehat{BCA} = \frac{AB}{AC} = \frac{8,66}{5} = 1,732$;

$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{AC} = \frac{8,66}{10} = 0,866$.

2. Calcul d'un angle : considérons toujours le triangle ABC (figure 1)

○ Calcule l'angle \widehat{BCA}

- Avec la fonction sinus : $\sin \widehat{BCA} = \frac{AC}{BC}$ soit $\sin \widehat{BCA} = \frac{5}{10} = 0,5$. Sur ta calculette, il existe une fonction qui permet de retrouver la valeur de l'angle lorsqu'est connue la valeur de son sinus. Cette fonction s'écrit \sin^{-1} ou il te faut sélectionner la touche inv, puis la touche sin. Auquel cas, $\widehat{BCA} = \sin^{-1}(0,5) = 30^\circ$.

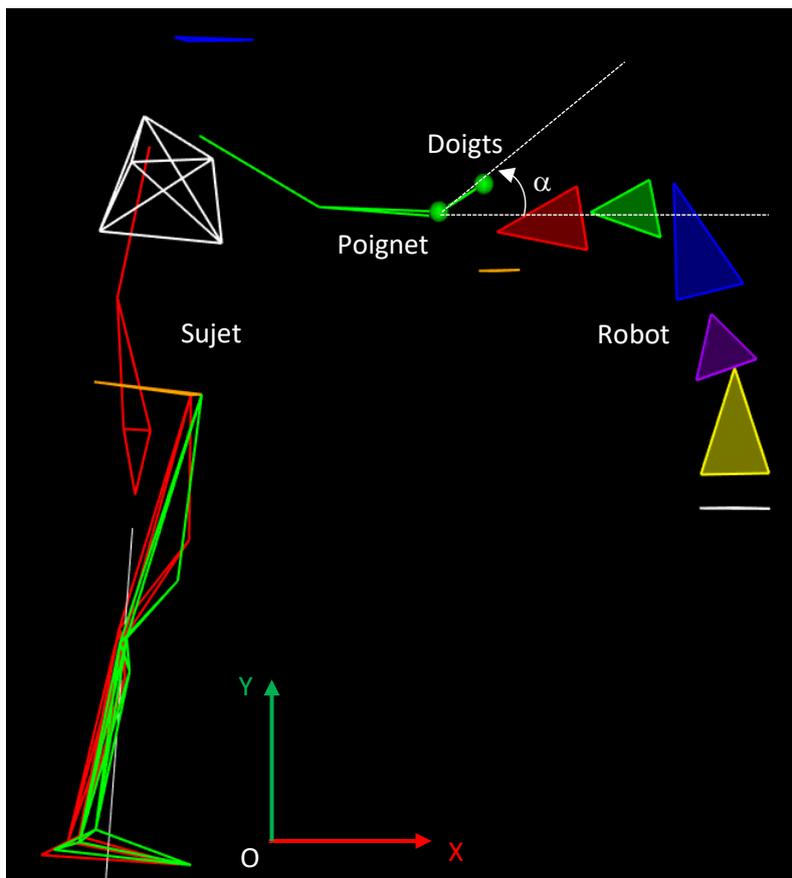
Fiche trigonométrie

Remarque : préalablement tu dois sélectionner sur ta calculette le fait que les angles soient exprimés dans l'unité degré. L'autre unité est le radian symbolisé par rd. La transformation se fait sachant que 90° correspond à 1,57 rd.

- Avec la fonction cosinus : $\cos \widehat{BCA} = \frac{AC}{BC}$ soit $\cos \widehat{ACB} = \frac{5}{10} = 0,5$. Sur ta calculette, il existe une fonction qui permet de retrouver la valeur de l'angle lorsqu'est connue la valeur de son cosinus. Cette fonction s'écrit \cos^{-1} ou il te faut sélectionner la touche inv, puis la touche cos. Auquel cas, $\widehat{BCA} = \cos^{-1}(0.5) = 60^\circ$.
- Avec la fonction tangente : $\tan \widehat{BCA} = \frac{AB}{AC}$ soit $\tan \widehat{BAC} = \frac{8,66}{5} = 1,732$. Sur ta calculette, il existe une fonction qui permet de retrouver la valeur de l'angle lorsqu'est connue la valeur de sa tangente. Cette fonction s'écrit \tan^{-1} ou il te faut sélectionner la touche inv, puis la touche tan. Auquel cas, $\widehat{BCA} = \tan^{-1}(1,732) = 60^\circ$.

3. Calcul de l'angle d'un segment

Un sujet repousse un robot industriel avec son bras droit. Calcule l'angle que forme sa main droite avec l'horizontale (α). Les coordonnées de son poignet et de ses doigts sont données dans le tableau.



Articulations	X (mm)	Y (mm)
Poignet droit	2484	1380
Doigts droits	2574	1437